УДК 533. 9

И. Г. Прохоров

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ БЕЗЫНДУКЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Посредством оценки слагаемых интеграла энергии стационарной краевой задачи магнитной гидродинамики в двумерной области получены неулучшаемые по параметрам На и ha оценки трехкомпонентных решений. С их помощью исследованы вопросы единственности решений для фиксированных наперед заданных значений чисел Гартмана, соответствующих компланарной и ортогональной плоскости течения составляющим вектора магнитной индукции.

1. Рассматривается стационарное двумерное течение вязкой несжимаемой электропроводной жидкости в замкнутой ограниченной области Ω. Граница области $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров. Внешняя часть области Ω имеет магнитную проницаемость вакуума. На течение наложено внешнее постоянное магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$, которое в дальнейшем полагается известным, удовлетворяющим условию $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\Omega + b\boldsymbol{\varkappa}$, где $\mathbf{B}_\Omega$ — гармоническое в Ω поле, компланарное плоскости течения, $\boldsymbol{\varkappa}$ — единичный вектор, ортогональный плоскости течения, $\boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\tau}$ — соответственно единичные внешняя нормаль и касательный к Γ вектор), $K = \sup\limits_{\Omega \cup \Gamma} |\mathbf{B}_\Omega|$.

Предполагается, что течение безындукционно, т. е. поле $\mathbf{B}$ пренебрежимо мало искажается течением. Скорость течения жидкости представляется в виде $\mathbf{V} = \mathbf{W} + w\boldsymbol{\varkappa}$, где векторное поле $\mathbf{W}$ компланарно Ω.

Рассматриваемое течение описывается в безразмерных переменных в рамках модели Навье — Стокса — Максвелла следующей краевой задачей:

$$\begin{gathered}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) - \nabla \cdot (\nabla w) + \nabla \left(p + \frac{\mathrm{Re}}{2} |\mathbf{W} + w\boldsymbol{\varkappa}|^2\right) = \mathrm{Re}\,(\mathbf{W} + w\boldsymbol{\varkappa}) \times \\ \times (\nabla \times \mathbf{W} + \nabla w \times \boldsymbol{\varkappa}) + [\mathrm{ha}\,\mathbf{E}_\Omega + \mathrm{Ha}\, e\boldsymbol{\varkappa} + (\mathbf{W} + w\boldsymbol{\varkappa}) \times (\mathrm{Ha}\,\mathbf{B}_\Omega + \mathrm{ha}\, b\boldsymbol{\varkappa})] \times \\ \times [\mathrm{Ha}\,\mathbf{B}_\Omega + \mathrm{ha}\, b\boldsymbol{\varkappa}], \\ \nabla \cdot \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\tau}|_\Gamma = V_\tau(x_1, x_2), \qquad (1) \\ w|_\Gamma = v_0(x_1, x_2), \\ \nabla \times (\mathbf{B} + b\boldsymbol{\varkappa}) = \mathrm{Re}_m [\mathbf{E}_\Omega + e\boldsymbol{\varkappa} + (\mathbf{W} + w\boldsymbol{\varkappa}) \times (\mathbf{B}_\Omega + b\boldsymbol{\varkappa})], \\ \nabla \times (\mathbf{E}_\Omega + e\boldsymbol{\varkappa}) = 0, \quad \mathbf{E}_\Omega \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Gamma-0} = \mathbf{E}_\Omega \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Gamma+0}, \\ \sigma_{\mathrm{in}} \mathbf{E}_\Omega \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma-0} = \sigma_{\mathrm{en}} \mathbf{E}_\Omega \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma+0}.\end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\Omega + e\boldsymbol{\varkappa}$ — вектор напряженности электрического поля; Re, Re_m — числа Рейнольдса; Ha, ha — числа Гартмана, построенные по составляющим вектора магнитной индукции, соответственно компланарной и ортогональной плоскости течения; значения Re, Re_m, Ha, ha фиксированы и наперед заданы.

Для получения априорных оценок решений задачу (1) обычно заменяют равнозначной задачей с нулевыми граничными условиями, используя конструкцию Хопфа [1], а именно: $\mathbf{W}$ представляется как $\mathbf{W} = \mathbf{V}_\Omega + \mathbf{V}_\varepsilon$, $\mathbf{V}_\varepsilon = \nabla \times [\varphi_1 \theta_1(x) \boldsymbol{\varkappa}]$, где φ_1 — решение краевой задачи

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad \nabla \varphi_1 \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma = -V_\tau, \quad \nabla \varphi_1 \cdot \boldsymbol{\tau}|_\Gamma = 0$$

Аналогично

$$w = v + v_\varepsilon, \; v_\varepsilon = \varphi_2 \theta_2(x).$$

Функции $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$ имеют вид

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \rho(x) < \varepsilon_i^2, \\ 3\dfrac{[1 - \rho(x)/\varepsilon_i]^2}{[1 - \varepsilon_i]^2} - 2\dfrac{[1 - \rho(x)/\varepsilon_i]^3}{[1 - \varepsilon_i]^3}, & \varepsilon_i^2 \leqslant \rho(x) < \varepsilon_i, \\ 0, & \varepsilon_i < \rho(x), \end{cases}$$

$\rho(x)$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до ближайшей компоненты границы. Пусть L — суммарная длина контуров Γ_i, q — максимальное значение кривизны гладких дуг контуров Γ_i, $|\nabla\varphi_1(x)| \leqslant M$, $|\Delta\varphi_1(x)| \leqslant m$, $|\varphi_2(x)| \leqslant N$, $|\nabla\varphi_2(x)| \leqslant n$. Числа M, m, N, n зависят только от геометрии Ω и от V_τ и v_0 соответственно. Тогда при данном выборе «срезающих» функций $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ выполняются оценки

$$\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_p \leqslant 2^{(p+2)/p} M L^{1/p} \varepsilon_1^{1/p}, \quad \|v_\varepsilon\|_p \leqslant 2^{(p+2)/p} N L^{1/p} \varepsilon_2^{(p+1)/p}$$

$$\|\nabla \times \mathbf{V}_\rho\|_p \leqslant 2^{(p+2)/p} (M+m) L^{1/p} \varepsilon_1^{(p-1)/p}, \quad \|\nabla v_\varepsilon\|_p \leqslant 2^{(p+2)/p} n L^{1/p} \varepsilon_2^{1/p}. \qquad (2)$$

Числа ε_1 и ε_2 выбираются в виде

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{\mathrm{Ha}+1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\delta_2}{\mathrm{ha}+1}, \quad \|a\|_p = \left(\int\limits_\Omega |a|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Для построения априорных оценок выписывается уравнение баланса энергии краевой задачи (1) с учетом того, что $\mathbf{W} = \mathbf{V}_\Omega + \mathbf{V}_\varepsilon$, $w = v + v_\varepsilon$:

$$\|\nabla \times \mathbf{V}_\Omega\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \mathrm{Ha}^2 \|\mathbf{V}_\Omega \times \mathbf{B}_\Omega\|_2^2 + \mathrm{Ha}\,\mathrm{ha}\,\mathrm{Re}_m^{-2} \|\nabla b\|_2^2 =$$
$$= \mathrm{Re}\left(\langle \nabla \times \mathbf{V}_\Omega, \mathbf{V}_\Omega \times \mathbf{V}_\varepsilon\rangle + \langle \nabla \times \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\Omega \times \mathbf{V}_\varepsilon\rangle + \langle \mathbf{V}_\Omega, v_\varepsilon \nabla v\rangle +\right.$$
$$\left. + \langle \mathbf{V}_\varepsilon, v_\varepsilon \nabla v\rangle\right) + \mathrm{Ha}\,\mathrm{ha}\,\mathrm{Re}_m^{-1} \langle \nabla b, v_\varepsilon \mathbf{B}_\Omega\rangle - \mathrm{Ha}^2 \langle \mathbf{V}_\Omega \times \mathbf{B}_\Omega, \mathbf{V}_\varepsilon \times \mathbf{B}_\Omega\rangle +$$
$$+ \mathrm{Ha}(\mathrm{ha} - \mathrm{Ha})\left(\|v\mathbf{B}_\Omega\|_2^2 + \langle v\mathbf{B}_\Omega, v_\varepsilon \mathbf{B}_\Omega\rangle\right) + \mathrm{ha}(\mathrm{Ha} - \mathrm{ha})\left(\langle v\mathbf{B}_\Omega, b\mathbf{V}_\Omega\rangle +\right.$$
$$\left. + \langle v_\varepsilon \mathbf{B}_\Omega, b\mathbf{V}_\Omega\rangle\right) - \langle \nabla \times \mathbf{V}_\Omega, \nabla \times \mathbf{V}_\varepsilon\rangle - \langle \nabla v, \nabla v_\varepsilon\rangle. \qquad (3)$$

Здесь $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\rangle = \int\limits_\Omega (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2)\,\mathrm{d}x$. Положим

$$\delta_1 = \min\{\rho_m/3, (4q)^{-1}, d^2 L^{-1} (8M\,\mathrm{Re})^{-4}\},$$
$$\delta_2 = \min\{\rho_m/3, (4q)^{-1}, 2^{-5} d^{2/5} L^{-1/5} (N\,\mathrm{Re})^{-4/5}\},$$

где ρ_m — минимальное расстояние между контурами Γ_i, d — диаметр области Ω.

При таком выборе δ_1 и δ_2, применяя к правой части (3) неравенства Гельдера, Юнга и мультипликативные неравенства и подставляя в правую часть оценки (2), получаем ($\mathrm{Ha} > \mathrm{ha}$)

$$\|\nabla \times \mathbf{V}_\Omega\|_2 \leqslant C_1 \mathrm{Ha}^{1/2}, \quad \|\nabla v\|_2 \leqslant C_2 \mathrm{Ha}^{1/2},$$
$$\|\mathbf{V}_\Omega \times \mathbf{B}_\Omega\|_2 \leqslant C_3 \mathrm{Ha}^{-1/2}, \quad \|\nabla b\|_2 \leqslant C_4 \mathrm{Ha}^{-1/2}, \qquad (4)$$
$$\|v\mathbf{B}_\Omega\|_2 \leqslant C_5 \mathrm{Ha}^{1/2} (\mathrm{Ha} - \mathrm{ha})^{-1},$$

где

$$C_1 = 8L(M+m)\delta_1^{-1/2} + 2C_5,$$
$$C_2 = 8L^{1/2} n \delta_2^{1/2} + 2C_5,$$
$$C_3 = 8KML^{1/2}\delta_1^{1/2} + 4C_5,$$
$$C_4 = 64L^{1/2} N (M + \mathrm{Re}_m^{-1} + 1)\delta_2^3 + 4C_5,$$
$$C_5 = 2L^{1/2}\left[16(M+m)^2(K^2+n^2) + N(M + \mathrm{Re}_m^{-1} + 1)\right]^{1/2}.$$

2. Единственность решения задачи (1) исследуется в случае, когда векторное поле $\mathbf{B}_\Omega$ не обращается в нуль в точках $\Omega \cup \Gamma$. Пусть $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1\Omega} + \mathbf{V}_\varepsilon + (v_1 + v_\varepsilon)\varkappa$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2\Omega} + \mathbf{V}_\varepsilon + (v_2 + v_\varepsilon)\varkappa$ — два различных решения задачи (1), $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_\Omega + b_1\varkappa$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_\Omega + b_2\varkappa$, $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1\Omega} + e\varkappa$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2\Omega} + e\varkappa$. Тогда $\mathbf{W}_2 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{U} + u\varkappa$, $\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \beta\varkappa$, $\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$. Из уравнения баланса энергии для разности двух решений $\mathbf{U} + u\varkappa$ и при том же, что и ранее, выборе δ_1 и δ_2 получим неравенство

$$\|\nabla \times \mathbf{U}\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \mathrm{Ha}^2 \|\mathbf{U} \times \mathbf{B}_\Omega\|_2^2 + \mathrm{Ha}\,\mathrm{ha}\,\mathrm{Re}_m^{-2} \|\nabla \beta\|_2^2 +$$
$$+ (\mathrm{Ha} - \mathrm{ha})^2 \|u\mathbf{B}_\Omega\|_2^2 \leqslant \mathrm{Re}\left(\langle \nabla \times \mathbf{U}, \mathbf{U} \times \mathbf{V}_{2\Omega}\rangle + \langle \nabla \times \mathbf{U}, \mathbf{U} \times \mathbf{V}_\varepsilon\rangle +\right.$$

$$+ \langle \mathbf{U}, u \nabla v_2\rangle + \langle \mathbf{U}, u \nabla v_\varepsilon\rangle) + \mathrm{Ha}\,\mathrm{ha}\,\mathrm{Re}_m^{-1} \langle \nabla \beta, b_2\mathbf{U}\rangle + \mathrm{ha}\,(\mathrm{Ha} - \mathrm{ha}) \times$$

$$\times [\langle u\mathbf{B}_\Omega, b_2\mathbf{U}\rangle + \langle \beta\mathbf{U}, v_2\mathbf{B}_\Omega\rangle + (\mathrm{Re}_m^{-1} + M) \langle \nabla \beta, u\mathbf{B}_\Omega\rangle]. \qquad (5)$$

После применения к (5) неравенств Гельдера, Юнга и мультипликативных неравенств и подстановки в (5) оценок (2) и (4) получим

$$a_{11} \| \nabla \times \mathbf{U} \|_2^2 + a_{22} \| \nabla u \|_2^2 + a_{33} \| \mathbf{U} \times \mathbf{B}_\Omega \|_2^2 + a_{44} \| \nabla \beta \|_2^2 + a_{55} \| u\mathbf{B}_\Omega \|_2^2 -$$

$$- 2a_{12} \| \nabla \times \mathbf{U} \|_2 \| \nabla u \|_2 - 2a_{13} \| \nabla \times \mathbf{U} \|_2 \| \mathbf{U} \times \mathbf{B}_\Omega \|_2 - 2a_{14} \| \nabla \times \mathbf{U} \|_2 \| \nabla\beta \|_2 -$$

$$- 2a_{15} \| \nabla \times \mathbf{U} \|_2 \| u\mathbf{B}_\Omega \|_2 - 2a_{45} \| \nabla \beta \|_2 \| u\mathbf{B}_\Omega \|_2 \leqslant 0. \qquad (6)$$

Здесь

$$a_{11} = 0{,}75 - (5C_1 d)^{1/6} C_3 k^{-5/6}\,\mathrm{Ha}^{-1/3}, \quad a_{22} = 1,$$

$$a_{33} = \mathrm{Ha}^2, \quad a_{44} = \mathrm{Ha}\,\mathrm{ha}\,\mathrm{Re}_m^{-2}, \quad a_{55} = (\mathrm{Ha} - \mathrm{ha})^2,$$

$$a_{12} = 2C_2 d^{1/2} k^{-1/2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Ha}^{-1/6}, \quad a_{13} = C_1^{3/2} C_3^{1/2} k^{-1} K\,\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Ha}^{1/2},$$

$$a_{14} = 2C_1 C_4 d^{-1}\,\mathrm{Re}_m^{-2}\,\mathrm{ha}^{1/2}\,\mathrm{Ha}^{1/6}, \quad a_{15} = 2\,(C_5 + C_2 d^{1/2} k^{1/2}\,\mathrm{Re})\,\mathrm{Ha}^{7/6},$$

$$a_{45} = \mathrm{ha}\,(\mathrm{Re}_m^{-1} + M)\,(\mathrm{Ha} - \mathrm{ha}), \quad k = \inf_{\Omega \cup \Gamma} | \mathbf{B}_\Omega |.$$

Из условия положительной определенности квадратичной формы (6) относительно $\| \nabla \times \mathbf{U} \|_2$, $\|\nabla u \|_2$, $\| \mathbf{U} \times \mathbf{B}_\Omega \|_2$, $\| \nabla\beta \|_2$, $\| u\mathbf{B}_\Omega \|_2$ следует, что существуют числа $\mathrm{Ha}_0 > 0$ и $\mathrm{ha}_0 > 0$, зависящие от геометрии области Ω и граничных условий задачи (1), такие, что при $\mathrm{Ha} > \mathrm{Ha}_0$ и $\mathrm{ha} > \mathrm{ha}_0$ $\mathbf{U} = 0$ и $u = 0$, т. е. задача (1) имеет единственное решение:

$$\mathrm{ha}_0 = \frac{4}{3}\,\mathrm{Re}^2\, dn\delta_2^{1/2},$$

$$\mathrm{Ha}_0 = \max \{[(5dC_1)^{1/6} C_3 k^{-5/6} + 4dk^{-1} C_2^2\,\mathrm{Re}]^3,$$

$$\left[1 + \frac{8}{3} C_1 C_4 d^{-1}\,\mathrm{ha}^{1/2}\right]^3, \quad \left[1 + \frac{8}{3} (C_5 + C_2)\, dk^{-1/2}\,\mathrm{Re}\right]^3 \Big\}.$$

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М. : Физматгиз, 1961.— 204 с.

Ин-т прикл. математики и
механики АН Украины, Донецк

Получено 29.11.90